

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
 இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம் இலங்கைப் பரීட்சைத் திணைக்களம்
 Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2017 අගෝස්තු
 கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2017 ஓகஸ்ட்
 General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2017

සංයුක්ත ගණිතය I
 இணைந்த கணிதம் I
 Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

* ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.

11. (a) $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.
 சமன்பாடு $f(x) = 0$ இரு வேறுவேறான மெய்யம் மூலங்களைக் கொண்டுள்ளதெனத் தரப்பட்டுள்ளது.
 $a^2 > 3b$ எனக் காட்டுக.

$f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனக் கொள்வோம். $\alpha + \beta$ ஐ a இன் சார்பிலும் $\alpha\beta$ ஐ b இன் சார்பிலும் எழுதுக.

$|\alpha - \beta| = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - 3b}$ எனக் காட்டுக.

மேலும் $|\alpha + \beta|, |\alpha - \beta|$ ஆகியவற்றை அதன் மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாடு

$9x^2 - 6(|a| + \sqrt{a^2 - 3b})x + 4\sqrt{a^2 - 3b} = 0$ இனால் தரப்படுகிறது எனவும் காட்டுக.

(b) $g(x) = x^3 + px^2 + qx + 1$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $p, q \in \mathbb{R}$ ஆகும். $g(x)$ ஆனது $(x-1)(x+2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி $3x+2$ ஆகும். $g(x)$ ஆனது $(x-1)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி 5 எனவும் $g(x)$ ஆனது $(x+2)$ இனால் வகுக்கப்படும்போது மீதி -4 எனவும் காட்டுக.

p, q ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக் கண்டு $(x+1)$ ஆனது $g(x)$ இன் ஒரு காரணியெனக் காட்டுக.

12. (a) $(5 + 2x)^{14}$ இன் ஈருறுப்பு விரியை x இன் ஏறு வலுக்களில் எழுதுக.

$r = 0, 1, 2, \dots, 14$ இற்கு மேற்குறித்த விரியில் x^r ஐக் கொண்டுள்ள உறுப்பு T_r எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 0$ இற்கு $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{2(14-r)}{5(r+1)} x$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $x = \frac{4}{3}$ ஆக இருக்கும்போது மேற்குறித்த விரியில் மிகப் பெரிய உறுப்பைத் தரும் r இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(b) $c \geq 0$ எனக் கொள்வோம். $r \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{1}{r+c} - \frac{1}{r+c+2}$ எனக் காட்டுக.

இதிலிருந்து, $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^n \frac{2}{(r+c)(r+c+2)} = \frac{(3+2c)}{(1+c)(2+c)} - \frac{1}{n+c+1} - \frac{1}{n+c+2}$ எனக் காட்டுக.

முடிவில் தொடர் $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{(r+c)(r+c+2)}$ ஒருங்குகின்றது என்பதை உய்த்தறிந்து, அதன் கூட்டுத்தொகையைக் காண்க.

c இற்கு உகந்த பெறுமானங்களுடன் இக்கூட்டுத்தொகையைப் பயன்படுத்தி

$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r(r+2)} = \frac{1}{3} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(r+1)(r+3)}$ எனக் காட்டுக.

13. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 3 \\ -1 & b & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a, b \in \mathbb{R}$.

$AB^T = P$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கு B^T ஆனது தாயம் B இன் நிலைமாற்றைக் குறிக்கின்றது.

$a = 1, b = -1$ எனக் காட்டி, a, b ஆகியவற்றுக்கு இப்பெறுமானங்களுடன் $B^T A$ ஐக் காண்க.

P^{-1} ஐ எழுதி, அதனைப் பயன்படுத்தி, $PQ = P^2 + 2I$ ஆக இருக்கத்தக்கதாகத் தாயம் Q ஐக் காண்க; இங்கு I ஆனது வரிசை 2 இலான சர்வசமன்பாட்டுத் தாயமாகும்.

(b) ஓர் ஆகண் வரிப்படத்தில் $|z| = 1$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண்கள் z ஐ வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளின் ஒழுக்கு C ஐப் பரும்படியாக வரைக.

$z_0 = a(\cos \theta + i \sin \theta)$ எனக் கொள்வோம்; இங்கு $a > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ஆகும். $\frac{1}{z_0}, z_0^2$ ஆகிய சிக்கலெண்கள் ஒவ்வொன்றினதும் மட்டினை a இன் சார்பிலும் தலைமை வீசலை θ இன் சார்பிலும் காண்க.

P, Q, R, S ஆகியன முறையே $z_0, \frac{1}{z_0}, z_0 + \frac{1}{z_0}, z_0^2$ என்னும் சிக்கலெண்களை மேற்குறித்த ஆகண் வரிப்படத்தில் வகைகுறிக்கும் புள்ளிகளெனக் கொள்வோம்.

புள்ளி P ஆனது மேற்குறித்த C மீது இருக்கும்போது

(i) Q, S ஆகிய புள்ளிகளும் C மீது இருக்கும் எனவும்

(ii) புள்ளி R மெய் அச்ச மீது 0 இற்கும் 2 இற்குமிடையே இருக்கும் எனவும்

காட்டுக.

14. (a) $x \neq 1, 2$ இற்கு $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$ எனக் கொள்வோம்.

$x \neq 1, 2$ இற்கு $f(x)$ இன் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $f'(x) = \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2}$ இனால் தரப்படுமெனக்

காட்டுக.

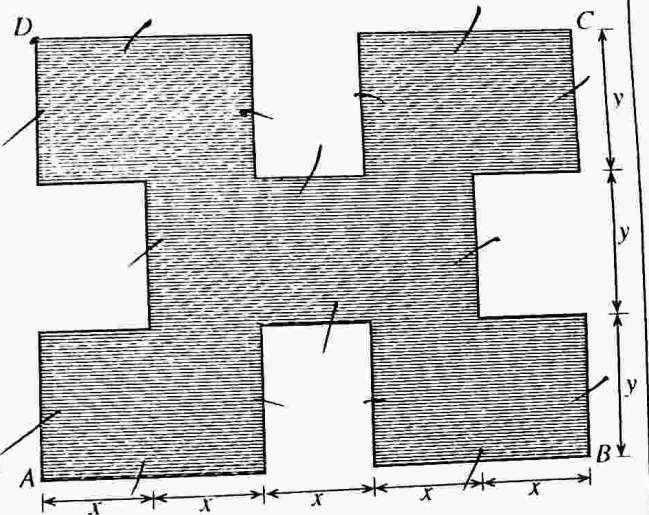
அணுகுகோடுகளையும் திரும்பற் புள்ளிகளையும் காட்டி $y = f(x)$ இன் வரைபைப் பரும்படியாக வரைக.

வரைபைப் பயன்படுத்திச் சமனிலி $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)} \leq 0$ ஐத் தீர்க்க.

(b) அருகில் உள்ள உருவில் காட்டப்பட்டுள்ள நிழற்றிய பிரதேசத்தின் பரப்பளவு 385 m^2 ஆகும். $5x$ மீற்றர் நீளமும் $3y$ மீற்றர் அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகம் $ABCD$ இலிருந்து ஒவ்வொன்றும் y மீற்றர் நீளமும் x மீற்றர் அகலமும் உள்ள சர்வசமனான நான்கு செவ்வகங்களை அகற்றுவதன் மூலம் இப்பிரதேசம் பெறப்படுகின்றது. $y = \frac{35}{x}$ எனவும் மீற்றரில் அளக்கப்படும் நிழற்றிய பிரதேசத்தின் சுற்றளவு P ஆனது $x > 0$ இற்கு $P = 14x + \frac{350}{x}$

இனால் தரப்படும் எனவும் காட்டுக.

P ஆனது இழிவாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



15. (a) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாக எடுத்துரைத்து, இதிலிருந்து, $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$ ஐக் காண்க.

(ii) பகுதிகளாகத் தொகையிடலைப் பயன்படுத்தி $\int xe^{-x} dx$ ஐக் கண்டு, இதிலிருந்து, வளைபு $y = xe^{-x}$ இனாலும் $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ என்னும் நேர்கோடுகளினாலும் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

(b) $c > 0$ எனவும் $I = \int_0^c \frac{\ln(c+x)}{c^2+x^2} dx$ எனவும் கொள்வோம். பிரதியீடு $x = c \tan \theta$ ஐப் பயன்படுத்தி

$$I = \frac{\pi}{4c} \ln c + \frac{1}{c} J \text{ எனக் காட்டுக; இங்கு } J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan \theta) d\theta.$$

a ஒரு மாறிலியாக இருக்கும் சூத்திரம் $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$ ஐப் பயன்படுத்தி, $J = \frac{\pi}{8} \ln 2$ எனக் காட்டுக.

$$I = \frac{\pi}{8c} \ln(2c^2) \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

16. $m \in \mathbb{R}$ எனக் கொள்வோம். புள்ளி $P \equiv (0, 1)$ ஆனது $y = mx$ இனால் தரப்படும் நேர்கோடு l மீது இருப்பதில்லையெனக் காட்டுக.

P இனாடாக l இற்குச் செங்குத்தாக உள்ள நேர்கோடு மீது உள்ள புள்ளி எதனதும் ஆள்கூறுகளை வடிவம் $(-mt, t+1)$ இல் எழுதலாமெனக் காட்டுக; இங்கு t ஒரு பரமானம்.

இதிலிருந்து, P இலிருந்து l இற்கு வரையப்பட்டுள்ள செங்குத்தின் அடியாகிய புள்ளி Q இன் ஆள்கூறுகள் $\left(\frac{m}{1+m^2}, \frac{m^2}{1+m^2}\right)$ இனால் தரப்படுகின்றனவெனக் காட்டுக.

m மாறும்போது புள்ளி Q ஆனது $x^2 + y^2 - y = 0$ இனால் தரப்படும் வட்டம் S மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டி, Q இன் ஒழுக்கை xy -தளத்தில் பரம்படியாக வரைக.

அத்துடன் புள்ளி $R = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ ஆனது S மீது இருக்கின்றதெனக் காட்டுக.

S ஐ வெளிப்புறமாகப் புள்ளி R இல் தொடுகின்றதும் x -அச்சு மீது மையம் இருக்கின்றதுமான வட்டம் S' இன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

S' இன் மையத்தை மையமாகக் கொண்டதும் S ஐ உட்புறமாகத் தொடுகின்றதுமான வட்டத்தின் சமன்பாட்டை எழுதுக.

17. (a) (i) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ இற்கு $\frac{2 \cos(60^\circ - \theta) - \cos \theta}{\sin \theta} = \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

(ii) தரப்பட்டுள்ள உருவில் $ABCD$ ஒரு நாற்பக்கலாகும்; இங்கு $AB = AD$, $\hat{A}BC = 80^\circ$, $\hat{C}AD = 20^\circ$, $\hat{B}AC = 60^\circ$ ஆகும்.

$\hat{A}CD = \alpha$ எனக் கொள்வோம். முக்கோணி ABC இற்குச் சைன் நெறியைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{AC}{AB} = 2 \cos 40^\circ \text{ எனக் காட்டுக.}$$

அடுத்ததாக முக்கோணி ADC இற்குச் சைன் நெறியைப்

$$\text{பயன்படுத்தி } \frac{AC}{AD} = \frac{\sin(20^\circ + \alpha)}{\sin \alpha} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) = 2 \cos 40^\circ \sin \alpha \text{ என்பதை உய்த்தறிக.}$$

$$\text{இதிலிருந்து, } \cot \alpha = \frac{2 \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

இப்போது மேலே (i) இல் உள்ள பேரைப் பயன்படுத்தி $\alpha = 30^\circ$ எனக் காட்டுக.

(b) சமன்பாடு $\cos 4x + \sin 4x = \cos 2x + \sin 2x$ ஐத் தீர்க்க.

